Soluciones doblemente periódicas de KP, sistemas integrables de Calogero-Moser y revestimientos ramificados de una curva elíptica

Charla Coloquio de Estudiantes, jueves 26 de octubre de 2023

24 octobre 2023

Estos tres temas aparentemente disconexos están en realidad completamente entrelazados. Las curvas proyectivas que aparecen, junto con sus *variedades jacobianas*, corresponden a los llamados *datos espectrales* de los otros dos temas (i.e. : (K-P) y (C-M)).

Sea $X := \mathbb{C}/\Lambda$ la curva elíptica asociada a un retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}$ y $\wp(x) : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la función $\wp$ de Weierstrass, con 1 polo doble en el origen. Se llama sistema integrable de Calogero-Moser ($2g$-dimensional y Λ periódico) al definido en $\mathbb{C}^g \times X^g$ con hamiltoniano

$$H(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{g} p_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j).$$

La ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP) es una EDP <u>no-lineal</u> que como tantas otras "viene" de la Física :

$$(KP) \quad \frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\big(u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\big)\,.$$

De cierto modo, esta ecuación cubre la Teoría de Curvas proyectivas de género positivo (i.e. : superficies de Riemann compactas no isomorfas a la esfera de Riemann), y sus variedades jacobianas. Dada una tal curva Γ de género $g > 0$, un punto $p_0 \in \Gamma$ y una base $(\omega_1, \cdots, \omega_g)$ de formas diferenciales holomorfas sobre Γ, integrando de p_0 a un punto arbitrario $p \in \Gamma$,

$$p \mapsto (\int_{p_0}^{p} \omega_1, \cdots, \int_{p_0}^{p} \omega_g)$$

obtenemos la llamada aplicación de Abel, la que es holomorfa y bien definida módulo el retículo $L \subset \mathbb{C}^g$ de sus períodos a lo largo de la homologá de Γ. Obtenemos así un morfismo a valores en el cociente correspondiente, $Ab_{p_0} : \Gamma \to Jac\Gamma := \mathbb{C}^g/L$, que se prueba ser un encaje, por lo que se puede identificar a $p_0 \in \Gamma$ con su imagen $Ab_{p_0}(\Gamma) \subset Jac\Gamma$ marcada en el origen $Ab_{p_0}(p_0) = \overrightarrow{0}$. Sean por otro lado, $\theta_\Gamma : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ la función tita, holomorfa y L-multiplicativa, naturalmente asociada a $Jac\Gamma$, λ una coordenada local de Γ en un entorno de p_0 y $U, V, W \in \mathbb{C}^g$ los tres primeros coeficientes del desarrollo de $Ab_{p_0}(\lambda)$ en

$\lambda = 0$. Entonces, para todo $Z \in \mathbb{C}^g$ la funcion $u(x,y,t) := -2\frac{\partial^2}{\partial_x^2} log\, \theta(xU + yV + tW + Z)$ es una solución de K-P. Es interesante observar que se trata de una "fórmula exacta", de la cual se pueden deducir propiedades de sus soluciones. Por ejemplo : como el vector U genera la tangente a Γ en el origen de $Jac\Gamma$, pedir que tales soluciones sean Λ-periódicas en la variable x equivale a la propiedad geométrica siguiente : existe una copia de la curva elíptica $X := \mathbb{C}/\Lambda$ en $Jac\Gamma$, tangente a Γ en p_0. Tales curvas son de hecho, cubrimientos ramificados de X, muy particulares pero existen : forman una familia de dimensión g en el espacio de módulos de curvas proyectivas de género g.
Por otro lado, toda función meromorfa no constante $u(x,y,t)$, Λ-periódica en x, debe tener polos, digamos $\{x_1(y,t), \cdots, x_n(y,t)\}$, para algún $g > 0$. Reemplazando en la ecuación K-P, se obtiene por un cálculo directo (anulando sus desarrollos polares en un entorno de cada $x = x_i(y,t)$), que tal función es solución de K-P si y solo si se descompone como

$$u(x,y,t) = 2\sum_1^g \wp(x - x_i(y,t)),$$

y que

$$\frac{\partial^2}{\partial_x^2} x_i = 4\sum_{j\neq i} \wp(x_i - x_j),\ \forall i = 1, \cdots, g.$$

Este último sistema lagrangiano de ecuaciones es equivalente a su vez, al sistema integrable definido en la variedad simpléctica $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}/\Lambda)^g$, con hamiltoniano

$$H := \frac{1}{2}\sum_1^g p_i^2 - 2\sum_{i\neq j} \wp(x_i - x_j).$$

Tal sistema, llamado de Calogero-Moser (C-M) Λ-periódico, es completamente integrable (i.e. : admite $g - 1$ otros hamiltonianos que conmutan dos a dos). Sus toros invariantes tienen por lo tanto dimensión g, y de hecho son las variedades jacobianas de las curvas arriba mencionadas.
De tal modo completamos la relación entre las tres áreas mencionadas en el título.
Por último es interesante observar que partimos de una familia de dimensión g de curvas proyectivas, todas de género g. Eso corresponde a una familia, g-dimensional de toros abelianos de dimensión g, mientras que el sistema integrable de C-M final es una variedad $2g$ dimensional, foleada por toros abelianos de dimensión g.