Charla: Una introducción a la teoría de AR.

presentada por: Octavio Mendoza (15-Feb-2023)

Resumen: La teoría de AR fue introducida en los años 70 del siglo pasado, por M. Auslander e I. Reiten, y se basa en una serie de técnicas que usan métodos homológicos, categóricos y diagramáticos. Dichos métodos revolucionaron a la teoría de representaciones de álgebras, la cual se encontraba estancada y se consideraba un área ya finalizada de la matemática. En esta charla, se dará un pequeño pantallazo sobre la teoría de AR, mostrando algunos de los aspectos más básicos de dicha teoría.

1.- Álgebras de Artin Λ.

2.- El trasladado de AR. de mod(Λ).

3.- Sucesiones de AR y morfismos irreducibles en mod(Λ).

4.- El radical de mod(Λ).

5.- La categoría de funtores Mod(mod(Λ)).

6.- Algebras de tipo de representación finito.

Una introducción a la Teoría de Auslander Reiten

1: Algebras de Artin

- Una R-álgebra de Artin es una R-álgebra Λ, con R artiniano tal que ${}_R\Lambda$ es finitamente generado.
- Dada una R-álgebra de Artin Λ, tenemos

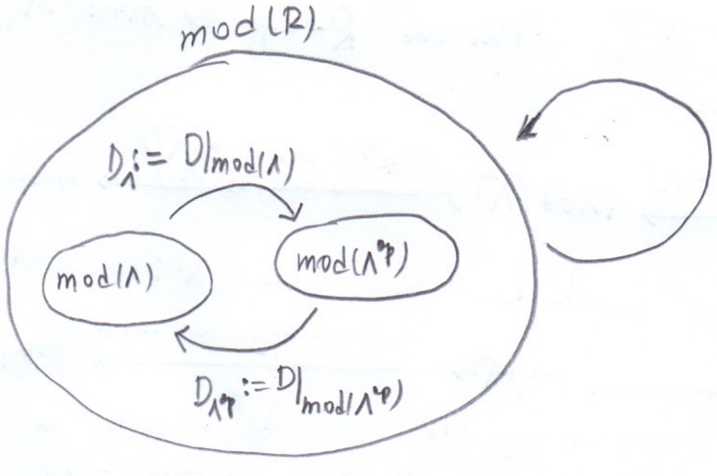
(1) $\mathrm{mod}(\Lambda) \leftarrow$ la categoría de Λ-módulos a izquierda f.g.

(2) $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ es una R-álgebra de Artin, $\forall M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(3) Λ^{op} la R-álgebra opuesta de Λ es también una R-álgebra de Artin.

(4) $\forall A, B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \in \mathrm{mod}(R)$.

- Las álgebras de Artin admiten dualidad: Sea Λ una R-álgebra de Artin, tenemos la "dualidad usual".



$D := \mathrm{Hom}_R(-, k) \leftarrow$ dualidad de categorías

$k := I_0(R/\mathrm{rad}(R))$.

- **El proceso de proyectivización de Auslander**

Sea Λ una R-álgebra de Artin. Para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene $\mathrm{add}(M) := \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) : \exists\, X \amalg Y \simeq M^n, \text{ con } n \geq 1\} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ que se conoce como la "clausura aditiva" de M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

$\mathrm{proj}(\Lambda) := \mathrm{add}({}_\Lambda\Lambda) \leftarrow$ son los proyectivos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

El método de proyectivización: Para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}(\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_\Lambda(M,-)"] & \mathrm{mod}(\Gamma) \\ \mathrm{add}(M) \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid"] \arrow[r, "\sim", "\mathrm{Hom}_\Lambda(M,-)"'] & \mathrm{proj}(\Gamma) \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid"] \end{tikzcd}$$

(equiv. de categorías).

- **El Teorema de Krull-Schmidt**

Para una R-álgebra de Artin Λ, se tiene que:

(1) $\forall A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$: A es inescindible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ es local.

(2) $\forall A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, con $A \neq 0$, $\exists\ A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{End}_\Lambda(A_i)$ es local $\forall i \in [1,n]$.

(3) La descomposición de (2) es única hasta isomorfismos.

- **Los funtores $*$ y $*^{op}$** Para una R-álg. de Artin Λ, se tienen los funtores

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}(\Lambda) \arrow[r, "* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)"] & \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \arrow[r, "*^{op} := \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-,\Lambda^{op})"] & \mathrm{mod}(\Lambda) \\ \mathrm{proj}(\Lambda) \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid"] \arrow[r, "\sim", "*"'] & \mathrm{proj}(\Lambda^{op}) \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid"] \arrow[r, "\sim", "*^{op}"'] & \mathrm{proj}(\Lambda) \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid"] \end{tikzcd}$$

En particular el funtor de Nakayama $\mathcal{N} := D_{\Lambda^{op}} \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$ induce una equiv. de categorías $\mathcal{N} : \mathrm{proj}(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{inj}(\Lambda) \leftarrow$ injectivos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

• $\mathrm{mod}(\Lambda)$ admite cubiertas proyectivas

• Un *epi-esencial* en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es un epimorfismo $f: X \to Y$ que satisface: $\forall\, g: Z \to X$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$fg: Z \to Y \text{ epi} \Rightarrow g \text{ es epi.}$$

• Una *cubierta proyectiva* de $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es un epi-esencial $\varphi: P \to M$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con $P \in \mathrm{proj}(\Lambda)$.

Propiedades básicas:

(1) Todo $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ admite una cubierta proyectiva $\varphi: P \to M$.

(2) si $\varphi': P' \to M$ es otra cubierta proyectiva de M,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\exists\ \wr"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & M \\ P' \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

• Para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, sea $[M] := \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) : X \simeq M\}$. Usando la existencia de cubiertas proyectivas en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se puede probar que la clase $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es esencialmente pequeña, i.e. la clase $\{[M] : M \in \mathrm{mod}(\Lambda)\}$ es un conjunto.

2. El trasladado de AR en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

• Una *presentación proyectiva minimal* (p.p.m.) de $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es una suc. exacta $\eta: P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \to 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que: $g: P_0 \to M$ & $P_1 \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f)$ son cubiertas proyectivas. Usando las propiedades de las cubiertas proyectivas, se puede probar que cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ admite una única (hasta isomorfismos) p.p.m.

- Para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, el <u>trasladado de AR</u> $\tau(M) \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, se calcula como sigue:

(1) Se fija una p.p.m. $\eta: P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \to 0$ de M.

(2) Se aplica el funtor $* = \mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ a η, obteniendose la suc. exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$\eta^* : \quad 0 \to M^* \xrightarrow{g^*} P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \to \underset{\displaystyle P_1^*/\mathrm{Im}(f^*)}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{CoKer}(f^*)}} \to 0$$

(3) se aplica el funtor $D_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ a η^*, obteniendose la suc. exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \to D_{\Lambda^{op}}(\mathrm{CoKer}(f^*)) \to D_{\Lambda^{op}}(P_1^*) \xrightarrow{D_{\Lambda^{op}}(f^*)} D_{\Lambda^{op}}(P_0^*) \to D_{\Lambda^{op}}(M^*) \to 0$$

Se define $\tau(M) := D_{\Lambda^{op}}(\mathrm{CoKer}(f^*)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{N}(f))$.

- <u>Propiedades básicas del trasladado de AR</u>

(1) $\forall \{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$: $\tau(\coprod_{i=1}^n A_i) \simeq \coprod_{i=1}^n \tau(A_i)$

(2) $\forall A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$: $\tau(A) = 0 \iff A \in \mathrm{proj}(\Lambda)$.

(3) Sean: $\mathrm{ind}(\Lambda) := \{[M] : M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y M es inescindible$\}$,

$\mathrm{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda) := \{[M] \in \mathrm{ind}(\Lambda) : M \notin \mathrm{proj}(\Lambda)\}$,

$\mathrm{ind}_{\mathcal{I}}(\Lambda) := \{[M] \in \mathrm{ind}(\Lambda) : M \notin \mathrm{inj}(\Lambda)\}$.

La aplicación $\tau : \mathrm{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda) \to \mathrm{ind}_{\mathcal{I}}(\Lambda)$, $[M] \mapsto [\tau M]$, es biyectiva.

(4) $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$: $\mathrm{pd}(X) \leq 1 \iff \mathrm{Hom}_\Lambda(I, \tau(X)) = 0 \quad \forall I \in \mathrm{inj}(\Lambda)$.

La fórmula de AR

- Para cada $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, consideremos $I(M,N)$ el R-submódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$, donde $f \in I(M,N) \overset{def}{\iff}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & \arrow[d, phantom, "\text{///}"] & N \\ & X \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \quad X \in \mathrm{inj}(\Lambda).$$

$\therefore$ $$\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,N) := \frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)}{I(M,N)} \in \mathrm{mod}(R)$$

- <u>Fórmula de AR</u>: Para cada $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ $\exists$ un isomorfismo en $\mathrm{mod}(R)$:

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \simeq D\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(N, \tau(M)).$$

3: Sucesiones de AR y morfismos irreducibles

- Sea $f: X \to Y$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que: (1) f es un <u>split-epi</u> (resp. <u>split-mono</u>) si $\exists\, g: Y \to X$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $fg = 1_Y$ (resp. $gf = 1_X$).

(2) f es <u>minimal a derecha</u> si:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[d, "\forall g"'] & \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\text{///}"] & Y \end{tikzcd} \implies g \text{ es iso.}$$

> <u>ejemplo</u>: Para un epi $f: P \to M$, con $P \in \mathrm{proj}(\Lambda)$, tenemos que:
>
> $f: P \to M$ es cub. proy. $\iff \begin{cases} f \text{ es minimal} \\ \text{a derecha} \end{cases}$

(3) f es <u>minimal a izquierda</u> si

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\forall h"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\text{///}"] & Y \end{tikzcd} \implies h \text{ es iso.}$$

> <u>ejemplo</u>: Para un mono $g: M \to I$, con $I \in \mathrm{inj}(\Lambda)$, tenemos que:
>
> $g: M \to I$ es env. inyectiva
>
> $\Updownarrow$
>
> g es minimal a izquierda.

- morfismos que casi se dividen:

(1) Decimos que $f: B \longrightarrow C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es minimal casi se divide a derecha (m.c.d.d.) si:

(i) f es minimal a derecha,

(ii) f es casi se divide a derecha (c.d.d.), i.e.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists h'"'] \arrow[d, "\forall h \text{ no split-epi}"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

f ← no es split-epi

(2) Decimos que $g: A \longrightarrow B$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es minimal casi se divide a izquierda (m.c.d.i.) si:

(i) g es minimal a izquierda;

(ii) g es casi se divide a izquierda (c.d.i.), i.e.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\forall t"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists t'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

g ← no es split-mono

$\forall t$ ← que no es split-mono

- Ejemplos (1) Para $P \in \mathrm{proj}(\Lambda)$ inescindible, la inclusión $i_P: \mathrm{rad}(P) \longrightarrow P$ es m.c.d.d.

(2) Para $I \in \mathrm{inj}(\Lambda)$ inescindible, la proyección canónica $\pi: I \longrightarrow I/\mathrm{soc}(I)$ es m.c.d.i.

- Propiedad básica: Para $f: B \longrightarrow C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos que

(1) f es c.d.d. $\Longrightarrow$ $[C] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

(2) f es c.d.i. $\Longrightarrow$ $[B] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

Teo básico: Para una R-alg. de Artin Λ, tenemos que

(a) Cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, con $[M] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, admite un $f: B \longrightarrow M$ que es m.c.d.d. Mas aún, si $f': B' \longrightarrow M$ es otro m.c.d.d, entonces $\exists\, h: B \xrightarrow{\sim} B'$ tq $f'h = f$.

(b) Cada $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, con $[N] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, admite un $g: N \longrightarrow A$ que es m.c.d.i. Mas aún, si $g': N \longrightarrow A'$ es otro m.c.d.i, entonces $\exists\, t: A \xrightarrow{\sim} A'$ tq $g't = g$.

- Una sucesión exacta $\delta: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ se dice que es de AR si g es m.c.d.i. & f es m.c.d.d. En tal caso, se puede probar que $A \simeq \tau(C)$ y $C \simeq \tau^{-1}(A)$.

Teo básico (existencia de suc. de AR).

(a) $\forall C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inescindible no proyectivo $\exists$ una suc. de AR $0 \longrightarrow \tau(C) \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0$.

(b) $\forall A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inescindible no inyectivo $\exists$ una suc. de AR $0 \longrightarrow A \longrightarrow Y \longrightarrow \tau^{-1}(A) \longrightarrow 0$.

Propiedad básica de las suc. de AR:

Sean $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ inescindible no proyectivo, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(C)^{op}$ y $\Sigma := \mathrm{End}_\Lambda(\tau C)$. En tal caso $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C)$ tiene estructura de Γ y Σ-módulo a izquierda. Mas aún,

(a) $\mathrm{soc}_\Gamma(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C)) = \mathrm{soc}_\Sigma(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C))$ y son, respectivamente, Γ y Σ-módulos simples.

(b) $\forall$ suc. exacta $\delta \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C)$, se tiene que δ es de AR $\iff \Gamma\cdot\delta = \mathrm{soc}_\Gamma(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C)) \iff \Sigma\cdot\delta = \mathrm{soc}_\Sigma(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \tau C))$.

• Decimos que $g : B \to C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es <u>irreducible</u> si:

(1) $g : B \to C$ no es split-epi ni split-mono.

(2) si
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dashed, "s"'] & \arrow[d, phantom, "\equiv"] & C \\ & X \arrow[ur, dashed, "t"'] & \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ t es split-epi $\&$ s es split-mono.

<u>Propiedades básicas</u>: si $g : B \to C$ es irreducible en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces:

(1) g es epi o bien g es mono.

(2) g es minimal a izquierda y a derecha.

(3) $g \neq 0$.

<u>Teo básico (1)</u> Para $g : B \to C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con $[C] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $g : B \to C$ es irreducible.

(b) $B \neq 0$ y $\exists\, g' : B' \to C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $(g, g') : B \amalg B' \to C$ es m.c.d.d.

<u>Teo básico (2)</u> Para $f : A \to B$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con $[A] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, las siguientes cond. son equivalentes.

(a) $f : A \to B$ es irreducible.

(b) $B \neq 0$ y $\exists\ f' : A \to B'$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\binom{f}{f'} : A \to B \amalg B'$ es m.c.d.i.

<u>Teo básico (3)</u> Sea $\delta : 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces

δ es de AR $\Longleftrightarrow$ f $\&$ g son irreducibles.

El término medio de una suc. de AR

Para una R-alg. de Artin Λ, se define $\alpha : \mathrm{ind}_{\oplus}(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{N}^+$, como sigue: Para $[C] \in \mathrm{ind}_{\oplus}(\Lambda)$, sean $\delta : 0 \to \tau(C) \to B \to C \to 0$ la suc. de AR que termina en C y $B = \coprod_{i \in I} B_i$ su descomposición en inescindibles. Se define: $\alpha(C) := \mathrm{Card}(I)$. Consideremos: $\alpha(\Lambda) := \sup\{\alpha(C) : [C] \in \mathrm{ind}_{\oplus}(\Lambda)\}$.

Teo básico:

(a) Si Λ no es semisimple, $\exists\ [C] \in \mathrm{ind}_{\oplus}(\Lambda)$ tq $\alpha(C) = 1$.

(b) Si Λ es de t.r.f. (i,e. $\mathrm{Card}(\mathrm{ind}(\Lambda)) < \infty$), entonces $\alpha(\Lambda) \leq 4$.

(c) $\alpha(\Lambda) < \infty$.

4.- El radical de $\mathrm{mod}(\Lambda)$

- Ideales en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

- Un ideal $I \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ es una clase de morfismos $I = \{I(X,Y)\}_{(X,Y) \in \mathrm{mod}(\Lambda) \times \mathrm{mod}(\Lambda)}$, con $I(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$, tal que:

(1) $I(X,Y)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$, $\forall (X,Y)$.

(2) I "absorbe" composiciones a izq. y a derecha, i,e. $\forall\ A \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} B$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene que

$$f \in I(X,Y) \implies hft \in I(A,B).$$

Ejemplo: (1) $\mathrm{Hom}_\Lambda := \{\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)\}_{(X,Y) \in \mathrm{mod}(\Lambda) \times \mathrm{mod}(\Lambda)} \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$

(2) $0 := \{\{0_{X,Y}\}\}_{(X,Y) \in \mathrm{mod}(\Lambda) \times \mathrm{mod}(\Lambda)} \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$, donde $0_{X,Y} : X \to Y$ es el morfismo cero.

• Dados I, J ideales en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, decimos que

$$I \subseteq J \overset{\text{def.}}{\iff} I(X,Y) \subseteq J(X,Y) \quad \forall (X,Y).$$

En particular, el conjunto de ideales de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es parcialmente ordenado; y para $I \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene que $0 \subseteq I \subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda$.

• Dado un ideal $I \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene:

(1) la categoría cociente $\mathrm{mod}(\Lambda)/I$, donde

(i) $\mathrm{obj}(\mathrm{mod}(\Lambda)/I) = \mathrm{obj}(\mathrm{mod}(\Lambda))$

(ii) Para $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, los morfismos en $\mathrm{mod}(\Lambda)/I$ de M en N es el conjunto cociente

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}(\Lambda)/I}(M,N) := \frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)}{I(M,N)} = \{\bar{f} = f + I(M,N),\ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)\}$$

(iii) La composición de morfismos en $\mathrm{mod}(\Lambda)/I$ es la inducida en los cocientes, i,e para

$$M \xrightarrow{\bar{f}} N \xrightarrow{\bar{g}} T$$

se define $\bar{g} \circ \bar{f} := \overline{gf}$.

(2) El funtor canónico $\pi_I : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)/I$

$$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (X \xrightarrow{\bar{f}} Y).$$

• El <u>radical</u> rad_Λ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es la clase de morfismos

$\mathrm{rad}_\Lambda = \{\mathrm{rad}_\Lambda(X,Y)\}_{(X,Y) \in \mathrm{mod}(\Lambda) \times \mathrm{mod}(\Lambda)}$, donde: Para $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$

$$f \in \mathrm{rad}_\Lambda(X,Y) \overset{\text{def.}}{\iff} \forall A \in \mathrm{mod}(\Lambda), \forall \beta : A \to X, \forall \alpha : Y \to A \text{ en } \mathrm{mod}(\Lambda) : \alpha f \beta \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_\Lambda(A)).$$

• Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

(i) $\mathrm{rad}^0_\Lambda := \mathrm{Hom}_\Lambda$,

(ii) $\mathrm{rad}^1_\Lambda := \mathrm{rad}_\Lambda$,

(iii) Para $n \geq 2$, $X, Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$, se define

$$f \in \mathrm{rad}^n_\Lambda(X,Y) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i, \text{ con } g_i \in \mathrm{rad}_\Lambda(X,Z_i) \ \& \ h_i \in \mathrm{rad}^{n-1}_\Lambda(Z_i,X)$$

- El radical infinito $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\mathrm{rad}^\infty_\Lambda(X,Y) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{rad}^n_\Lambda(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathrm{mod}(\Lambda).$$

- <u>Propiedades básicas del radical</u>

(1) $\mathrm{rad}_\Lambda(X,X) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_\Lambda(X)) \quad \forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(2) $\mathrm{rad}^n_\Lambda \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ & $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda \trianglelefteq \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(3) $\mathrm{rad}^k_\Lambda\left(\coprod_{i=1}^{n} X_i, \coprod_{j=1}^{m} Y_j\right) = \coprod_{(i,j)\in[1,n]\times[1,m]} \mathrm{rad}^k_\Lambda(X_i,Y_j). \ \forall k \geq 0$.

(4) $\mathrm{rad}_\Lambda(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) : f \text{ no es iso}\}$ si $[X],[Y] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

(5) Sean $[A],[B] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}$. Entonces

$$\mathrm{rad}_\Lambda(A,B) = \begin{cases} \mathrm{rad}(\Gamma)\cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) & \text{si } A \simeq B. \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) & \text{si } A \not\simeq B. \end{cases}$$

(6) $\forall [A],[B] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ y $f: A \to B$, se tiene que:

f es irreducible $\Longleftrightarrow f \in \mathrm{rad}_\Lambda(A,B) - \mathrm{rad}^2_\Lambda(A,B)$.

<u>Ejemplo:</u> Si la R-algebra de Artin Λ es un anillo con división, se tiene que los únicos ideales en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ son los triviales, i,e, 0 y Hom_Λ. En particular $\mathrm{rad}_\Lambda = 0$.

- Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una colección de R-álgebras de Artin. El coproducto $\coprod_{i\in I} \mathrm{mod}(T_i)$ es la subcategoría plena de $\bigtimes_{i\in I} \mathrm{mod}(T_i)$ que consiste de las I-adas $M=(M_i)_{i\in I}$ de $\bigtimes_{i\in I} \mathrm{mod}(T_i)$ tales que el conjunto $\mathrm{Supp}(M) := \{i \in I : M_i \neq 0\}$ es finito.

- Teo básico

$$\operatorname{mod}(\Lambda)/\operatorname{rad}_\Lambda \simeq \coprod_{[M]\in \operatorname{ind}(\Lambda)} \operatorname{mod}(T_M^{op}),$$

donde $T_M := \operatorname{End}_\Lambda(M)/\operatorname{rad}(\operatorname{End}_\Lambda(M))$ es un anillo con división.

5: La categoría de funtores $\operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$:

- Denotaremos por $\operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$ a la categoría de R-funtores (covariantes): $F: \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{Mod}(R)$, $(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (FX \xrightarrow{F(f)} FY)$, tales que: $F(gf) = F(g)F(f)$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$ y $F: \operatorname{Hom}_\Lambda(X,Y) \to \operatorname{Hom}_R(FX,FY)$ es un morfismo de R-módulos.

Un morfismo $\alpha: F \to G$ en $\operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$ es una colección $\alpha = \{\alpha_X : FX \to GX\}_{X\in \operatorname{mod}(\Lambda)}$ de morfismos de R-módulos tales que: $\forall\, X \xrightarrow{f} Y$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, se tiene que

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y). \end{tikzcd}$$

[denotamos por $\operatorname{Hom}(F,G)$ al conjunto de todos los morfismos $\alpha: F \to G$]

- Ejemplo: Para cada $X \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, tenemos que $\operatorname{Hom}_\Lambda(X,-) \in \operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$. Más aún, dichos funtores son objetos proyectivos en $\operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$.

- Dados $F, G \in \operatorname{Mod}(\operatorname{mod}(\Lambda))$, decimos que F es un subfuntor de G, i.e. $F \subseteq G$, si $\forall\, X \xrightarrow{f} Y$ en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, se tiene

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, phantom, "///"] & F(Y) \\ G(X) \arrow[u, hook, "\mu_X"] \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \arrow[u, hook, "\mu_Y"'] \end{tikzcd}$$

donde μ_X y μ_Y son inclusiones de conjuntos y morfismos de R-módulos, i.e. $G(f) = F(f)|_{G(X)}$.

- Un subfuntor $F \subseteq G \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es maximal si:

(1) $F \subsetneq G$ y (2) si $F \subseteq H \subseteq G \Rightarrow F = H$ ó $H = G$.

- Un funtor $F \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es simple si: (1) $F \neq 0$ y (2) $0, F$ son los únicos subfuntores de F.

- Propiedades básicas: (1) Para $[C] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, se tiene que $\mathrm{rad}_\Lambda(C,-)$ es un subfuntor maximal de $\mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)$. En particular, el cociente $S_C := \mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)/\mathrm{rad}_\Lambda(C,-)$ es un funtor simple.

(2) Si $S \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es simple, entonces $\exists!\ [C] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ tal que $S \simeq S_C$.

- Decimos que $F \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es finitamente generado (f.g.) si $\exists\ C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y un epimorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-) \longrightarrow F$. Consideremos

(1) $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\Lambda)) := \{ F \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ tq F es f.g.$\}$.

(2) $\mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\Lambda)) := \{ F \in \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\Lambda)) : F$ es proyectivo$\}$.

- Propiedades básicas

(1) El funtor $\mathbb{P} : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\Lambda))$, $(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (\mathrm{Hom}_\Lambda(Y,-) \xrightarrow{(f,-)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X,-))$ es una dualidad de categorías

(2) Para $F \in \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$, se tiene que:

$F \in \mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \iff \exists\ C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tq $F \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)$.

(3) $\forall\ C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$: $\mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)$ es inescindible $\iff [C] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

- Cubiertas proyectivas en $\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$

(1) Un epimorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es esencial si $\forall g : X \longrightarrow M$ en $\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ tq φg es epi, se tiene que g es epi.

(2) Para $M \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$, decimos que $\varphi : P \longrightarrow M$ es cubierta proyectiva si φ es epi-esencial & P es proyectivo.

(3) $\varphi : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es minimal a derecha si

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, "\forall\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "///" near start, shift right=3ex] & \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd} \Longrightarrow \alpha \text{ es iso.}$$

· Propiedades básicas:

(1) Sea $\varphi : P \longrightarrow M$ en $Mod(mod(\Lambda))$, con P proyectivo y φ un epi. Entonces

$\varphi : P \longrightarrow M$ es cub. proyectiva $\Longleftrightarrow$ φ es minimal a derecha.

(2) Para $[C] \in ind(\Lambda)$, se tiene que $\pi_C : Hom_\Lambda(C,-) \longrightarrow S_C$ es cubierta proyectiva.

· Una presentación proyectiva minimal (p.p.m.) de $M \in Mod(mod(\Lambda))$ es una suc. exacta en $Mod(mod(\Lambda))$

$$P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

tal que $\beta : P_0 \longrightarrow M$ & $P_1 \xrightarrow{\alpha} Im(\alpha)$ son cubiertas proyectivas.

Teo: Para una suc. exacta $\delta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en $mod(\Lambda)$, tenemos que las sig. cond. son equivalentes:

(a) δ es una suc. de AR.

(b) $[A] \in ind_I(\Lambda)$ y la suc. exacta de funtores

$$0 \to Hom_\Lambda(C,-) \xrightarrow{(g,-)} Hom_\Lambda(B,-) \xrightarrow{(f,-)} Hom_\Lambda(A,-) \longrightarrow S_A \to 0$$

es una p.p.m. del simple S_A.

Teo Para $[X] \in ind(\Lambda)$, se tiene que:

$X \in inj(\Lambda) \Longleftrightarrow \exists$ una p.p.m. $0 \to Hom_\Lambda(M,-) \longrightarrow Hom_\Lambda(X,-) \longrightarrow S_X \to 0$

6.- Álgebras de tipo de representación finito

- El soporte de un funtor. Para $F \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ el soporte de F es:

$\mathrm{Supp}(F) := \{[M] \in \mathrm{ind}(\Lambda) : F(M) \neq 0\}$

- Propiedad básica (I) Las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) Λ es de t.r.f. (i.e $\mathrm{ind}(\Lambda)$ es finito).

(2) $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ $\mathrm{Supp}\,\mathrm{Hom}_\Lambda(X,-)$ es finito.

(3) $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ $\exists n \geq 1$ tq $\mathrm{rad}^n_\Lambda(X,-) = 0$.

(4) $\forall F \in \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ $\mathrm{Supp}(F)$ es finito.

- Propiedad básica (II) Si Λ es t.r.f., entonces

(1) $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda = 0$.

(2) $\forall [A],[B] \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ $\forall f \in \mathrm{rad}_\Lambda(A,B)$, con $f \neq 0$, se tiene que

$$f = \sum_i \Big(\sum_{\alpha_i} \prod_{\beta=1}^{m_i} f_{i_\beta}^{(\alpha_i)} \Big),$$

donde cada $f_{i_\beta}^{(\alpha_i)}$ es un morfismo irreducible entre inescindibles.

- El carcaj de AR Γ_Λ

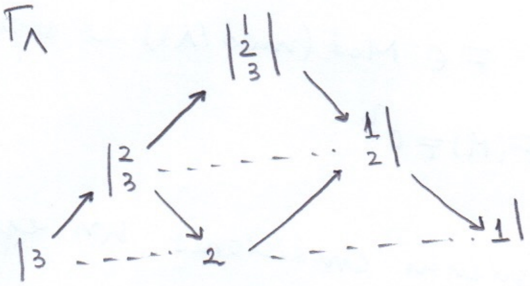
Γ_Λ es un grafo orientado definido como sigue:

- Vértices de $\Gamma_\Lambda := \mathrm{ind}(\Lambda)$.
- $[X] \longrightarrow [Y]$ es un vértice en Γ_Λ si $\exists$ un morfismo irreducible $X \longrightarrow Y$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

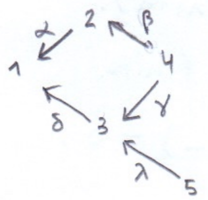
Ejemplos:

(1) Sea $\Lambda = kQ$, con $Q = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$

Γ_Λ

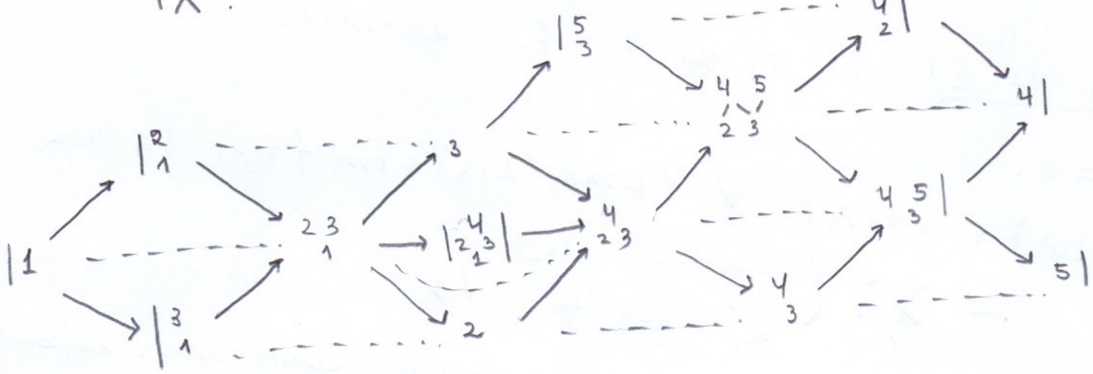


(2) $Q =$

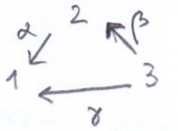


, $\Lambda = kQ/\langle \delta\gamma - \alpha\beta, \delta\lambda \rangle$

Γ_Λ:

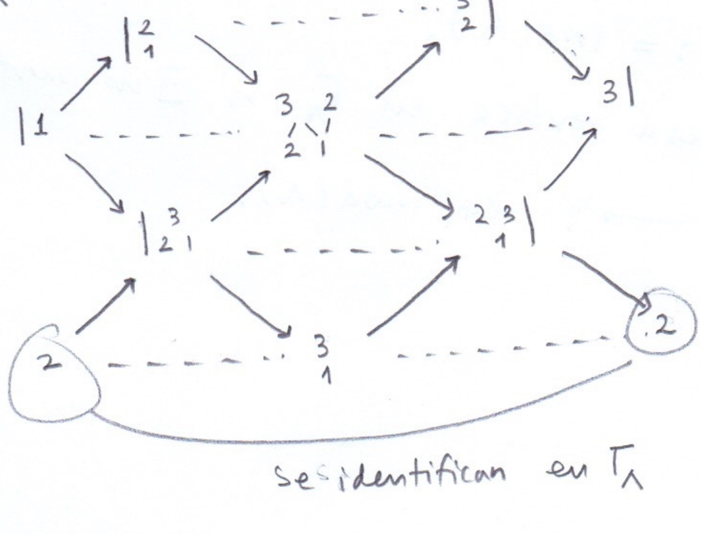


(3) $Q =$



, $\Lambda = kQ/\langle \alpha\beta \rangle$

Γ_Λ:



se identifican en Γ_Λ

- El Teorema de Auslander (1977)

Para una R-alg. de Artin conexa Λ, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Λ es de t.r.f.

(b) Γ_Λ es un carcaj conexo y finito.

(c) Γ_Λ tiene una componente conexa finita.