La segunda ley de Newton perturbada con ruido blanco

José R. León R.
IMERL, UdelaR

La segunda ley de Newton se escribe de manera muy simple: $ma = F$, donde m es la masa del móvil, a es su aceleración y F es la fuerza que actúa sobre el móvil. Si denotamos por $x(t) \in \mathbb{R}^d$ la trayectoria que sigue el móvil y suponemos que la fuerza se escribe $-\gamma(x, x')x' - \nabla V(x) + dW$, siendo γ el coeficiente de la fuerza de roce, $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ el potencial cuyo gradiente es la fuerza que se ejerce sobre el móvil y W un movimiento Browniano (BM) estándar con valores en $\mathbb{R}^d$, la segunda ley de Newton nos da la ecuación del oscilador armónico no lineal perturbado con ruido blanco:

$$mx''(t) + \gamma(x(t), x'(t))x'(t) + \nabla V(x(t)) = dW(t).$$

Esta ecuación se interpreta como una ecuación diferencial estocástica (EDS) de segundo orden. También podemos recurrir a describir el movimiento en el espacio de fases y poniendo $X(t) = x(t)$ e $Y(t) = x'(t)$ se tiene el siguiente sistema de EDS

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y(t)dt \\ mdY(t) &= -\gamma(X(t), Y(t))Y(t) - \nabla V(X(t)) + dW(t). \end{aligned}$$

En esta charla comenzaré con un poco de historia que comienza con Langevin anteponiendo un modelo de este tipo al de Einstein del MB. Luego hablaré del artículo seminal de Kolmogorov y su trascendencia en los estudios de Hörmander sobre los operaadores hipoellipticos. A continuación estudiaré la solución del sistema, la existencia de una medida invariante y el mixing exponencial de la solución. Aquí el móvil se moverá sin restricciones por todo el espacio. Luego me detendré en aplicaciones de tales modelos: descripción del movimiento de animales en dominios acotados, difusión de contaminantes en masas de agua (abiertas o cerradas) y finalmente modelo neuronales. Al final pondré el énfasis en algunos problemas abiertos.