

Presentación del curso Curvas hiperelípticas, función theta de un toro complejo y EDPes no-lineales.

2 août 2022

Estos tres temas aparentemente desconexos están en realidad completamente entrelazados. El ejemplo de juguete correspondiente corresponde a dimensión 1 y se titularía *Cúbicas planas, funciones elípticas y soluciones estacionarias de Korteweg-de Vries (KdV)*. En cierto sentido se puede decir que nuestro curso es una enésima prueba de la transversalidad de la Matemática, o que la Matemática es una y por éso se debe escribir en singular. Los requisitos necesarios son variados pero básicos en cada una de las áreas concernidas : variable compleja, integrales dobles (Fubini, Stokes), topología de superficies compactas orientables, homología integral de tales superficies, funciones tita (theta) de una o varias variables en tanto funciones cuasi-periódicas respecto a un retículo del espacio vectorial complejo,...

No es preciso en cambio saber nada en particular sobre las EDP, excepto que es extremadamente difícil obtener soluciones exactas. Sabiendo ésto último, se apreciará a su justo valor las aplicaciones a la resolución exacta de algunas EDPés que modelizan problemas físicos. Paso a enumerar los puntos esenciales y las conexiones más evidentes.

1. Una curva hiperelíptica Γ está definida por la ecuación $y^2 = \prod_1^{2g+1}(x - \alpha_i)$, donde $\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j$. Es una curva analítica compleja y compacta, donde podemos definir la noción de función meromorfa global (con polos), y eventualmente singularidades esenciales.
2. No existen funciones holomorfas porque Γ es compacta, pero sí formas diferenciales holomorfas. Estas forman un espacio vectorial complejo de dimensión g , siendo además $2-2g$ la característica de Euler de la superficie compacta orientable subyacente.
3. Integrando una base de tales formas obtenemos el llamado encaje de Abel, de la curva en su variedad jacobiana, $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^g/\Lambda$, (siendo Λ el retículo formado por los períodos de las integrales).
4. Existe una función holomorfa Λ -multiplicativa $\theta_\Gamma : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$. Tomando cocientes de trasladados de θ_Γ , o derivadas parciales de orden 2 de $\ln\theta_\Gamma$, en cualquier par de direcciones, obtenemos funciones Λ -periódicas (i.e. : meromorfas sobre \mathbb{C}^g/Λ), de las cuales deducimos, por restricción, funciones meromorfas sobre Γ .
5. El Teorema de Riemann-Roch permite calcular la dimension del espacio de funciones meromorfas de Γ con polos en un subconjunto dado $\{p_i\} \subset \Gamma$.

6. Dados $(x, y, t) \in \mathbb{C}^3$, una coordenada local λ de Γ en un punto p y g otros puntos $D := \{p_1, \dots, p_g\} \subset \Gamma$, se construye entonces una única función $\psi_D(x, y, t)$, meromorfa en $\Gamma \setminus \{p\}$, con polos en D y una singularidad esencial en p de tipo :

$$\psi_D(x, y, t)(\lambda) = \exp\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} + \frac{t}{\lambda^3}\right)(1 + \zeta(x, y, t)\lambda + O(\lambda^2)).$$

7. Cualquier derivada parcial de $\psi_D(x, y, t)$ es meromorfa con polos en D y tiene el mismo tipo de singularidad esencial en (el mismo desarrollo en un entorno) de p .
8. Existen polinomios diferenciables $L = \partial_x^2 - u(x, y, t)$ y P de grado 3 tales que $\partial_y - L$ y $\partial_t - P$ anulan $\psi_D(x, y, t)$. Esto implica que su conmutador $[\partial_y - L, \partial_t - P]$ es nulo, e in fine, que el potencial $u(x, y, t)$ de L satisface la EDP de Kadomtsev-Petviashvili :

$$(KP) \quad \frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\right).$$

9. Por último, si p es uno de los puntos $(0, \alpha_i) \in \Gamma$ o el punto en el infinito, $u(x, y, t)$ es independiente de y y solución de la ecuación de Korteweg-deVries (ella modeliza las ondas solitarias, o solitones, que se crean río adentro cuando sube la marea).

$$(KdV) \quad u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx}) = 0.$$

Tal ecuación no-lineal fue obtenida hacia fines del siglo XIX, y estudiada desde entonces. Lo que es preciso enfatizar es que con estos métodos se obtienen soluciones exactas de KdV, en términos de la función θ_Γ (también denominadas, soluciones algebro-geométricas).