Curvas hiperelípticas, funcion theta de un toro complejo y EDPes no-lineales.

17 juin 2022

Estos tres temas aparentemente disconexos están en realidad completamente entrelazados. El ejemplo de juguete correspondiente corresponde a dimensión 1 y se titularía *Cúbicas planas, funciones elípticas y soluciones estacionarias de Korteweg-de Vries (KdV).* Paso a enumerar los puntos esenciales y las conexiones más evidentes.

1. Una curva hiperelíptica Γ está definida por la ecuación $y^2 = \Pi_1^{2g+1}(x - \alpha_i)$, donde $\alpha_i \neq \alpha_j,\ \forall i \neq j$. Es una curva analítica compleja y compacta, donde podemos definir la noción de función meromorfa global (con polos), y eventualmente singularidades esenciales.
2. No existen funciones holomorfas porque Γ es compacta, pero sí formas diferenciales holomorfas. Estas forman un espacio vectorial complejo de dimensión g, siendo además $2 - 2g$ la característica de Euler de la superficie compacta orientable subyacente.
3. Integrando una base de tales formas obtenemos el llamado encaje de Abel, de la curva en su variedad jacobiana, $\Gamma \to \mathbb{C}^g/\Lambda$, (siendo Λ el retículo formado por los períodos de las integrales).
4. Existe una función holomorfa Λ-multiplicativa $\theta_\Gamma : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$. Tomando cocientes de trasladados de θ_Γ, o derivadas parciales de orden 2 de $ln\theta_\Gamma$, en cualquier par de direcciones, obtenemos funciones Λ-periódicas (i.e. : meromorfas sobre $\mathbb{C}^g/\Lambda$), de las cuales deducimos, por restricción, funciones meromorfas sobre Γ.
5. El Teorema de Riemann-Roch permite calcular la dimension del espacio de funciones meromorfas de Γ con polos en un subconjunto dado $\{p_i\} \subset \Gamma$.
6. Dados $(x, y, t) \in \mathbb{C}^3$, una coordenada local λ de Γ en un punto p y g otros puntos $D := \{p_1, \cdots, p_g\} \subset \Gamma$, se construye entonces una única función $\psi_D(x, y, t)$, meromorfa en $\Gamma \setminus \{p\}$, con polos en D y una singularidad esencial en p de tipo :

$$\psi_D(x,y,t)(\lambda) = exp(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} + \frac{t}{\lambda^3})(1 + \zeta(x,y,t)\lambda + O(\lambda^2))\,.$$

7. Cualquier derivada parcial de $\psi_D(x, y, t)$ es meromorfa con polos en D y tiene el mismo tipo de singularidad esencial en (el mismo desarrollo en un entorno) de p.

8. Existen polinomios diferenciables $L = \partial_x^2 - u(x,y,t)$ y P de grado 3 tales que $\partial_y - L$ y $\partial_t - P$ anulan $\psi_D(x,y,t)$. Esto implica que su conmutador $[\partial_y - L, \partial_t - P]$ es nulo, e in fine, que el potencial $u(x,y,t)$ de L satisface la EDP de Kadomtsev-Petviashvili :

$$(KP) \quad \frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\big(u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\big)\,.$$

9. Por último, si p es uno de los puntos $(0,\alpha_i) \in \Gamma$ o el punto en el infinito, $u(x,y,t)$ es independiente de y y solución de la ecuación de Korteweg-deVries (ella modeliza las ondas solitarias, o solitones, que se crean río adentro cuando sube la marea).

$$(KdV) \quad u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx}) = 0\,.$$

   Tal ecuación no-lineal fue obtenida hacia fines del siglo XIX, y estudiada desde entonces. Lo que es preciso enfatizar es que con estos métodos se obtienen soluciones exactas de KdV, en términos de la función θ_Γ (también denominadas, soluciones algebro-geométricas).