Topologías del Grupo de Cremona

Federico Carrasco
Orientador: Iván Pan

Sea k un cuerpo y denotemos por $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo de dimensión n sobre k. El conjunto $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ de aplicaciones birracionales $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ es el llamado grupo de Cremona de dimensión n sobre k. Dado $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, existen polinomios homogeneos del mismo grado $f_0, \cdots, f_n \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$, sin factores en común, tales que si $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ no es un cero común de los $f_i's$ entonces $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_n(x))$. El grado de f es el grado de cualquier f_i y se denota $deg(f)$. Para una variedad algebraica A sobre k, hay una noción natural de familia de elementos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ parametrizada por A. Dicha familia la anotamos $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ y estas familias dan lugar a la topología de Zariski de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

En 1966, I.R. Shafarevich pregunto: "¿Es posible introducir una estructura universal de grupo de dimensión infinita en el grupo de automorfismos (automorfismos birracionales) de una variedad algebraica arbitraria?". Años más tarde, en el 2008, J.P. Serre pregunto: "¿Es posible introducir una topología en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ que sea compatible con $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ y $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$?".

Estas preguntas fueron respondidas por J. Blanc y J.P. Furter en 2013. Más detalladamente, la primera fue respondida negativamente, ya que probaron que si $n \geq 2$ no hay una estructura de varieda algebraica de dimensión infinita en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, de modo que las familias $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ correspondan a morfismos de variedades algebraicas. En cuanto a la segunda, tiene respuesta afirmativa, ya que introdujeron una topología, denominada euclídea, tal que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ dotado de ella es un grupo topológico Hausdorff que es compatible con los subgrupos.

El objetivo de este trabajo monográfico es comprender el trabajo de J. Blanc y J.P. Furter así como también presentarlo en un lenguaje más accesible.