

Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Centro de Matemática (FCIEN) – Instituto de Estadística (FCEA)

1. Datos del curso

El curso se impartirá en modalidad híbrida en salón de FCEA.

Fecha de comienzo: lunes 11 de marzo de 2024, 8:00 horas, salón 15 (FCEA). Las clases tendrán lugar hasta el 18 de julio de 2024.

El curso será válido para carreras de grado y posgrado (en éstas últimas con la asignación de tareas especiales).

El curso consta de 17 clases teórico-prácticas de dos horas cada una.

Se propone la asignación de 10 créditos (de acuerdo a la definición de la UdelaR, un crédito equivale a 15 horas de dedicación del estudiante según se detalla en el ítem 4. Metodología de enseñanza).

El equipo docente está integrado por el Profesor Raúl Tempone (responsable; email: raul.tempone@kaust.edu.sa) junto los Profesores Marco Scavino, Erik von Schwerin y Aku Kammonen.

El texto del curso son los apuntes de clase:

Stochastic and Partial Differential Equations with Adapted Numerics, escrito entre otros por el responsable del curso. Los apuntes de clase contienen referencias a bibliografía adicional relevante en la materia. Es posible que también utilicemos material adicional.

2. Prerrequisitos

El curso está dirigido a estudiante avanzado de grado (120 créditos aprobados) y de posgrado en Matemática, Estadística e Ingeniería.

Los prerrequisitos para el curso son conocimientos de cursos básicos de matemáticas (aquí se hace hincapié en la probabilidad) y análisis numérico, o equivalentes. Se presupone cierta experiencia en programación científica y en el uso de sistemas operativos UNIX/Linux/Windows.

Co-requisitos: Las tareas domiciliarias y los experimentos computacionales constituyen una parte muy importante del curso. Las tareas computacionales se

realizarán en MATLAB/Python/R con software existente para que el estudiante lo modifique y experimente con él.

3. Objetivos

El objetivo de este curso es proporcionar un conocimiento básico de las ecuaciones diferenciales estocásticas y su solución numérica, útil para el modelado científico y de ingeniería, guiado por algunos problemas en aplicaciones en matemáticas financieras, ciencia de materiales, problemas de flujo geofísico, difusión turbulenta, teoría de control y métodos Monte Carlo.

Discutiremos cuestiones básicas para la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, por ejemplo, para determinar el precio de una opción, ¿es más eficaz resolver la ecuación diferencial parcial determinista de Black y Scholes o utilizar un método de Monte Carlo basado en una representación estocástica?

El curso tratará la teoría básica de las ecuaciones diferenciales estocásticas, incluyendo aproximación débil y fuerte, métodos numéricos eficientes y estimaciones del error, la relación entre las ecuaciones diferenciales estocásticas y las ecuaciones diferenciales parciales, la reducción de la varianza, etc. También se profundizarán temas de control óptimo para ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales estocásticas y conexiones con la ecuación en derivadas parciales no lineal de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Al finalizar el curso, el estudiante deberá ser capaz de

- formular las propiedades básicas del proceso de Wiener;
- definir la integral de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) de Itô;
- aplicar la fórmula de Itô para diferenciales estocásticos;
- discretizar EDEs y comprobar las propiedades resultantes de los métodos aproximación;
- implementar los métodos Monte Carlo y Monte Carlo multinivel para discretizaciones de EDEs;
- aplicar técnicas de reducción de varianza, incluido el método Monte Carlo multinivel;
- plantear las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante para una determinada EDE;

- controlar los errores de discretización que surgen en un método Monte Carlo para la aproximación débil de EDEs;
- formular y discretizar problemas de control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y EDEs.

4. Metodología de enseñanza

Horas clases teórico-prácticas: 34

Horas consulta: 8

Horas evaluación: 5

Subtotal horas presenciales: 47

Horas estudio: 40

Horas resolución ejercicios/prácticos: 45

Horas preparación examen final: 20

Total de horas de dedicación del estudiante: 152

Desglose de la distribución de las clases por mes:

- 1 clase: Introducción al curso / marzo
- 3 clases: Repaso de probabilidad y estadística / marzo
- 1 clase: Integrales estocásticas de Itô / abril
- 1 clase: Ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô / abril
- 1 clase: Fórmulas de Itô / abril
- 1 clase: Ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante/ abril
- 1 clase: Conexiones con la matemática financiera, modelo de Black-Scholes / mayo
- 2 clases: Método Monte Carlo y reducción de la varianza, Monte Carlo multinivel / mayo
- 1 clase: Aproximación débil y discretización temporal / mayo
- 3 clases: Control óptimo estocástico y ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman / junio-julio
- 2 clases: Conexiones con el aprendizaje automático / julio

5. Forma de evaluación

Habrá un examen final en clase.

La calificación consta de dos partes: entrega de soluciones de los problemas planteados en las tareas domiciliarias y un examen escrito. Las tareas domiciliarias y las presentaciones correspondientes se realizarán por *grupos de estudiantes*. Cada grupo entregará un informe escrito para cada tarea. Para las

tareas seleccionadas, se asignará a un grupo la presentación de su solución en la clase. Los problemas planteados en las tareas domiciliarias no se repartirán entre los miembros del grupo; cada estudiante deberá ser capaz de explicar a la clase cualquier parte de la solución, y cuando un miembro del grupo presenta una solución los instructores pueden plantear preguntas también a los demás miembros del grupo.

Respecto de las presentaciones: las soluciones de los problemas de las tareas se presentarán por grupo de acuerdo al calendario determinado. Prepare una presentación de 30 minutos con material de apoyo que incluya la formulación del problema, el análisis teórico, los resultados de los experimentos computacionales, las conclusiones, las preguntas abiertas, etc.

Tómese en serio la presentación y aprovéchela como una oportunidad de adquirir cierta formación práctica en el difícil arte de la presentación oral. Recuerde que presentar un material de forma clara y convincente requiere bastante preparación para tener éxito. Todos necesitamos práctica y críticas positivas en este sentido, tanto los profesores como los estudiantes.